Operációkutatás vizsga

B csoport

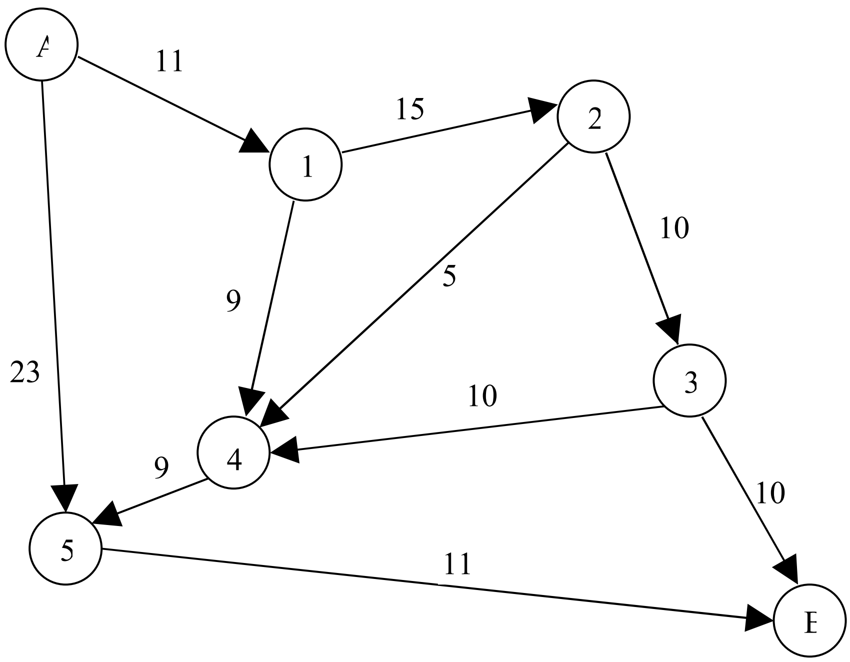
Budapesti Corvinus Egyetem

2007. január 16.

Egyéb gyakorló és vizsgaanyagok találhatók a **http://matstat.fw.hu** *honlapon a* **Letölthető vizsgasorok, segédanyagok** *menüpont alatt.*

OPERÁCIÓKUTATÁS **B** **NÉV:**
2007. január 16., 12 - 13^{30} **NEPTUN KÓD:**

1. (20 pont) Az alábbi projekt hálózatban az élek tevékenységeket jelölnek, az élek mellé írt számok a tevékenységek időtartamát napokban. Egy csúcs azt az eseményt jelöli, hogy a hozzá befutó élekkel jelzett tevékenységek befejeződtek és egyben a belőle kiinduló élekkel jelzett tevékenységek elkezdődhetnek. A projekt kezdetét az A csúcs, befejezését a B csúcs képviseli. A projekt január 1-jén reggel kezdődik. Munkaszüneti nap nincs. (Január és március 31 naposak, február 28 napos.)



a. (4 p.) Mi a projekt legkorábbi befejezési dátuma? március 7

b. (2 p.) Mi a kritikus út? (A,1) –(1,2) – (2,3) – (3,4) – (4,5) – (5,B)

c. (4 p.) Mi az a legkorábbi dátum, amikor a 3-as csúccsal jelzett esemény bekövetkezhet? február 5

Mi az a legkorábbi dátum, amikor az 5-ös csúccsal jelzett esemény bekövetkezhet? február 24

d. (4 p.) Mi az a legkésőbbi dátum, amikor a projekt befejezésének késleltetése nélkül a(z)

2-es csúccsal jelzett esemény bekövetkezhet? Január 26

5-ös csúccsal jelzett esemény bekövetkezhet? február 24

e. (2 p.) Mi az a legkésőbbi dátum, amikor a projekt befejezésének késleltetése nélkül elkezdődhet az (1,2) éllel jelzett tevékenység? Január 12

f. (4 p.) Hány nappal tolódhat el az (1,4) éllel jelzett tevékenység elkezdése a legkorábbi kezdési dátumától anélkül, hogy ez késleltetné bármelyik másik tevékenység legkorábbi elkezdését? 26 nap

2. (20 pont) Három gép (G1, G2 és G3) mindegyike háromféle termék (T1, T2, T3) bármelyikét képes előállítani. Az egyes gépeken egy óra alatt bármelyik termékből egy darab készíthető el. A gépek kapacitása rendre 45, 55 és 65 gépóra/hét, az egyes termékekből a hetente minimálisan előállítandó mennyiség rendre 40, 26, és 24 darab.
Egy termék darabjának gyártási költsége (euróban) az egyes gépeken az alábbi táblázatban látható:

	T1	T2	T3
G1	9	8	7
G2	6	5	4
G3	7	8	9

Jelölje x_{jk} a j-edik gépen a k-adik termékből hetente gyártandó mennyiséget darabban, j=1,2,3; k=1,2,3.

a. (4 p.) Írjuk fel a célfüggvényt, ha a heti összköltséget szeretnénk minimalizálni.
$9x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 7x_{31} + 8x_{32} + 9x_{33}$

b. (4 p.) Írjuk fel azokat a feltételeket, amelyek az egyes termékekből hetente minimálisan előállítandó mennyiségekre vonatkoznak.

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 40$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 26$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 24$

c. (6 p.) Jelölje y_1, y_2, y_3 a gépek ki nem használt kapacitását! Azaz legyen $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ és
$y_1 = 45-(x_{11} + x_{12} + x_{13})$
$y_2 = 55-(x_{21} + x_{22} + x_{23})$

$y_3 = 65-(x_{31} + x_{32} + x_{33})$,

Vezessen be nulla-egy változókat, és írjon fel olyan lineáris egyenlőtlenségeket, amelyek azt a követelményt fejezik ki, hogy legalább az egyik gép kapacitását teljesen ki kell használni.

Vezessük be a v_1, v_2, v_3 nulla-egy változókat. Ekkor a következő feltételeket kell csatolni a feladat feltételrendszeréhez:

$y_1 \le 45v_1, \quad y_2 \le 55v_2, \quad y_3 \le 65v_3,$

$v_1 + v_2 + v_3 \le 2$

d. (6 p.) Írjon fel olyan lineáris egyenlőtlenségeket, amelyek azt a követelményt fejezik ki, hogy ha a harmadik gépet foglalkoztatjuk (legalább egy terméket gyártunk rajta), akkor a kapacitásának a kihasználtsága legalább 60% legyen.

Az u nulla-egy változóval:

$y_3 - 26 \le M(1-u)$ (mert 26=0.4*65, s aki nem használtság legfeljebb 40%)

$65 - y_3 \le Mu$

3. (26 pont) Fát kell szállítani Taszárról illetve Szigetvárról Ajkára és Várpalotára. A szállítás esetleg átrakodási pontok közbeiktatásával, és esetleg bizonyos szakaszokon vízen történhet.

Taszár kapacitása 120 tonna hetente, Szigetvár kapacitása 80 tonna/hét.
Ajka igénye 130 tonna/hét, Várpalota igénye 70 tonna/hét.

Egy tonna fa szállítási költségét az egyes viszonylatokban az alábbi táblázatok tartalmazzák.

Szárazföldön:

	Boglár	Szántód
Taszár	14	19
Szigetvár	21	15

Vízen

	Révfülöp	Tihany
Boglár	5	8
Szántód	8	5

Szárazföldön

	Ajka	Várpalota
Révfülöp	15	20
Tihany	18	16

Szárazföldön közvetlenül

	Ajka	Várpalota
Taszár	50	70
Szigetvár	68	60

Más viszonylatokat (például Révfülöpről Tihanyba, vagy Taszárról közvetlenül Tihanyba, stb.) kizárunk, mert ott a szállítás vagy nem lehetséges, vagy borzasztóan költséges.
Optimális (minimális költségű) szállítási tervet kell készíteni.

a. (10 p.) Töltse ki az alábbi táblázatban az üres cellákat a megfelelő számokkal úgy, hogy az eredményül kapott klasszikus szállítási feladat alkalmas legyen a fenti összetett szállítási feladat megoldására!
(A ki nem töltött cellákat a javításnál M-nek értelmezzük, azokat nem szükséges beírni.)

From \ To	Boglár	Szántód	Révfülöp	Tihany	Ajka	Várpalota	Supply
Taszár	14	19			50	70	120
Szigetvár	21	15			68	60	80
Boglár			5	8			
Szántód			8	5			
Révfülöp					15	20	
Tihany					18	16	
Demand					130	70	

Megoldás:

From \ To	Boglár	Szántód	Révfülöp	Tihany	Ajka	Várpalota	Supply
Taszár	14	19	1000	1000	50	70	120
Szigetvár	21	15	1000	1000	68	60	80
Boglár	0	1000	5	8	1000	1000	200
Szántód	1000	0	8	5	1000	1000	200
Révfülöp	1000	1000	0	1000	15	20	200
Tihany	1000	1000	1000	0	18	16	200
Demand	200	200	200	200	130	70	

Az alábbi táblázat egy optimális szállítási tervet tartalmaz a hozzátartozó (optimális) duálváltozókkal együtt:

	Duálvált.	14	11	19	16	34	32
Duálvált.		Boglár	Szántód	Révfülöp	Tihany	Ajka	Várpalota
0	Taszár	120					
4	Szigetvár		80				
-14	Boglár	80		120			
-11	Szántód		120		80		
-19	Révfülöp			80		120	
-16	Tihany				120	10	70

b. (8 p.) Tekintsük azt az optimális megoldást, amelyben Szántódról Révfülöpre10 tonna, míg Szántódról Tihanyba 70 tonna fát szállítanak. Mennyit szállítanak ekkor a következő szakaszokon?

Boglárról Révfülöpre …120… tonnát,
Révfülöpről Tihanyba …0… tonnát,
Révfülöpről Ajkára …130… tonnát,
Tihanyból Várpalotára …70… tonnát.

c. (4+4 p.) Az eredeti optimális megoldásban igaz-e vagy sem, hogy ha az adott alábbi viszonylat költségét egy kis pozitív számmal növeljük (minden mást változatlanul hagyva), akkor az optimális megoldás egyértelmű lesz? Miért?

Szántód – Révfülöp igaz , mert csak itt 0 redukált költség, és ez is pozitív lesz
Boglár – Tihany hamis , mert a fenti redukált költség 0 marad és az optimális megoldás nemdegenerált.

4. (10 pont) Az alábbi 5 állítás közül az igazakat jelölje meg I betűvel, a hamisakat pedig H-val! (Minden jó megjelölés **2 pont**, minden rossz megjelölés **–1 pont**, ha nem jelölte meg az állítást, **0 pont**)

Tekintsünk egy M/M/s típusú sorbanállási feladatot a szokásos jelölésekkel. Tehát:
λ = Beérkezések átlagos száma (időegységenként) = Beérkezési gyakoriság
μ = Kiszolgálások átlagos száma (időegységenként) = Kiszolgálási gyakoriság
s = kiszolgáló helyek száma
ρ = a rendszer kihasználtsági foka
L = A rendszerben tartózkodó ügyfelek átlagos száma
L_q = A sorbanálló ügyfelek átlagos száma
W = Az ügyfél által átlagosan a rendszerben töltött idő
$P(j \geq s)$=annak a valószínűsége, hogy a rendszerben lévő ügyfelek száma eléri a kiszolgálóhelyek számát.

(1) $L_q = P(j \geq s)/(1-\rho)$ H

(2) Ha s=1, akkor $L_q = \rho/(1-\rho)$ H

(3) Minden s-re $L = L_q + \rho\lambda$ H

(4) Minden s-re $L = L_q + \lambda/\mu$ I

(5) $L = \lambda W$ I

5. (24 p.) Ali és Bea a következő játékot játsszák. Ali betesz egy üveggolyót a bal vagy a jobb zsebébe úgy, hogy azt Bea ne lássa. Ez után Bea megtippeli, hogy Ali melyik zsebébe tette az üveggolyót.
Ha eltalálja, hogy a balba, akkor kap Alitól 2 eurót. Ha eltalálja, hogy a jobba, akkor kap Alitól 4 eurót. Ha viszont nem találja el, hogy melyik zsebbe került a golyó, akkor ő fizet Alinak 3 eurót.

a. (4 p.) Adja meg a játékosok (tiszta) stratégiáit és a kifizető mátrixot Ali szempontjából.

A zseb \ B tipp	bal	jobb
bal	-2	3
jobb	3	-4

b. (2 p.) Redukálható-e a játék dominált stratégiák elhagyásával? (nem)

c. (4 p.) Van-e a játéknak nyeregpontja (tiszta stratégiákban)? (nincs)

Miért? maxmin = -2 < 3 = minmax

d. (6 p.) Mi a sorjátékos (Ali) optimális stratégiája? (0.58 , 0.42) = (7/12 , 5/12)

e. (6 p.) Mi az oszlopjátékos (Bea) optimális stratégiája? (0.58 , 0.42) = (7/12 , 5/12)

f. (1 p.) Mennyi a játék értéke? (v= 0.08 = 1/12)

g. (1 p.) Igazságos-e a játék? (nem)