

Analízis példatár

v0.2

A példatár folyamatosan bővül, keresd a frissebb verziót a <http://matstat.fw.hu> honlapon a letölthető példatárak közt.

Országgh Tamás

Budapest, 2005-2010

„Mottó: *Ki kéne vágni minden fát, és jól lebetonozni az egészséget!*”¹

Amikor a tanítványaim először találkoznak velem, mindenki siet leszögezni, hogy ő hülye a matekhoz, mindig is hülye volt, és minden bizonnyal az is marad, de szeretne levizsgázni. De hát munka mellett, gyerek mellett, számára követhetelen előadások mellett, amire nem is nagyon van ideje eljárni, nem jut semmire sem egyedül. De hát különben is, ez csak távoktatás/levelező képzés/esti tagozat, ahol nem mutatják meg, hogy kell példát megoldani, meg egyébként is, analízis – mint ahogy minden matekos tárgy – csak szivatásból van, hogy minél többen bukjanak. Én nem mindenben értek egyet velük, de az tény és való, hogy ha valaki megkeres engem, nem tudok nyugodt szívvel egy olyan példatárat ajánlani, amiből megfelelően tudna gyakorolni, vizsgára készülni. Ez hatványozottan igaz a nem nappali tagozatos képzések esetében, de néha egyébként is.

Az évek folyamán, melyet vizsgafelkészítéssel töltöttem el, rengeteg példa gyűlt össze, melyek segítségével többszáz embert készítettem fel sikeresen vizsgára, szigorlatra. Úgy gondoltam, hasznos lenne a felgyülemlett anyag rendszerezésével és kibővítésével egy szabadon hozzáférhető példatársorozatot összeállítani, melyben minden feladatnak van megoldása. Nem mellékesen így nem a ronda kézírásommal kell odaadni a tanítványaimnak a gyakorlásra szánt példákat. Ennek a sorozatnak az első darabját olvasod most, mely az analízis vizsgán/zh-n/uv-n/iv-n/matek szigorlat analízis részén hivatott átrúgdosni Téged.

A példatár a $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ dokumentumleíró nyelvre épülő $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ makrocsoomag használatával a $\text{L}_{\text{Y}}\text{X}$ szövegszerkesztő program segítségével készült. Ha esetleg szükséged van képletek szerkesztésére (itt kifejezetten sok képletre gondolok) és már eleget szívtál az ilyen-olyan Office programcsomagokkal, akkor próbáld ki, megéri.

Ezt a művet a Creative Commons Nevezd meg!-Ne add el!-Ne változtasd! 2.5 Hungary Licenc² alatt teszem közzé. Ez azt jelenti, hogy szabadon másolhatod, terjesztheted a szerző megjelölése mellett, de tilos a kereskedelmi célú felhasználás és a mű megváltoztatása.



¹Idézet egy az 1990-es évek elején a Múzeum körúton egy villanyoszlopra felerősített *Anarchista matematikaoktatás*-t hirdető tábláról.

²<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/hu/> A Creative Commons licenszről bővebben magyarul: <http://creativecommons.hu/>, angolul: <http://www.creativecommons.org/>.

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu>

email: matstat@fw.hu

Tartalomjegyzék

I. Feladatok	5
1. Egy kis középiskolás matek	6
1.1. Ismered a számológéped?	6
1.2. A hatványozás azonosságai	6
1.3. Egy pár szó az egyenletek megoldásáról	6
2. Minden, amit tudni akartál a sorozatokról	8
2.1. Monotonitás	8
2.2. Határérték	8
2.3. Korlátosság	10
2.4. Küszöbszám	11
2.5. Sorozatok teljes vizsgálata	11
3. Függvénye határértéke, folytonossága	12
3.1. Függvények végtelenben vett határértéke	12
3.2. Függvények véges helyen vett határértéke	12
3.3. Vegyes feladatok függvények határértékére	13
3.4. Függvények folytonossága	13
4. Deriválni mindenki tud (csak még nem tud róla)	14
4.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények deriválása	15
4.2. Szorzat és tört deriválása	19
4.3. Összetett, de nem feltétlenül bonyolult függvények deriválása	20
4.4. Mire jó a deriválás I.: érintő egyenlete	22

4.5.	Mire jó a deriválás II.: elaszticitás	22
4.6.	Mire jó a deriválás III.: függvényvizsgálat	22
4.6.1.	Monotonitás, szélsőérték	22
4.6.2.	Konvex-konkáv szakaszok, inflexiós pont	22
4.6.3.	Teljes függvényvizsgálat	23
4.7.	Mire jó a deriválás IV.: L'Hospital szabály	23
5.	Az integrálás „csak” a deriválás visszafelé	24
5.1.	Elemi (\neq egyszerű) függvények integrálása	25
5.2.	Összetett függvények deriváltjának integrálása	26
5.3.	Parciális integrálás	27
5.4.	Integrálás helyettesítéssel	27
5.5.	Határozott integrálás	27
5.6.	Mire jó az integrálás: területszámítás	27
6.	Többváltozós függvények és egyéb nyálánkságok	29
6.1.	Parciális deriválás	29
6.2.	Többváltozós függvények szélsőértéke	29
II.	Megoldás	30
7.	Egy kis középiskolás matek	31
7.1.	Ismered a számológéped?	31
7.2.	A hatványozás azonosságai	31
7.3.	Egy pár szó az egyenletek megoldásáról	31
8.	Minden, amit tudni akartál a sorozatokról	32
8.1.	Monotonitás	32
8.2.	Határérték	32
8.3.	Korlátosság	32
8.4.	Küszöbszám	32
8.5.	Sorozatok teljes vizsgálata	32

9. Függvénye határértéke, folytonossága	33
9.1. Függvények végtelenben vett határértéke	33
9.2. Függvények véges helyen vett határértéke	33
9.3. Vegyes feladatok függvények határértékére	33
9.4. Függvények folytonossága	33
10. Deriválni mindenki tud (csak még nem tud róla)	34
10.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények deriválása	34
10.2. Szorzat és tört deriválása	36
10.3. Összetett, de nem feltétlenül bonyolult függvények deriválása	38
10.4. Mire jó a deriválás I.: érintő egyenlete	40
10.5. Mire jó a deriválás II.: elaszticitás	40
10.6. Mire jó a deriválás III.: függvényvizsgálat	40
10.7. Mire jó a deriválás IV.: L'Hospital szabály	40
11. Az integrálás „csak” a deriválás visszafelé	41
11.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények integrálása	41
11.2. Összetett függvények deriváltjának integrálása	41
11.3. Parciális integrálás	42
11.4. Integrálás helyettesítéssel	42
11.5. Határozott integrálás	42
11.6. Mire jó az integrálás: területszámítás	42
12. Többváltozós függvények és egyéb nyalánkságok	43
12.1. Parciális deriválás	43
12.2. Többváltozós függvények szélsőértéke	43

I. rész

Feladatok

1. fejezet

Egy kis középiskolás matek

1.1. Ismered a számológéped?

1.2. A hatványozás azonosságai

1.3. Egy pár szó az egyenletek megoldásáról

A következő kifejezéseket alakítsd szorzattá az $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ azonosság felhasználásával.

1. $x^2 + 3x - 10$

9. $x^3 + 2x^2 - x$

2. $x^2 - x - 2$

10. $x^2 - 3x$

3. $4x^2 + 4x - 8$

11. $x^4 - 16$

4. $5x^2 + 25x + 30$

12. $x^2 - x - 16$

5. $-2x^2 - 6x - 4$

13. $x^3 - 1$

6. $x^2 - x - 2$

14. $x^2 - 1$

7. $2x^2 + 3x - 2$

15. $3x^2 + 2x - 1$

8. $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$

16. $2x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}$

17. $x^2 - \frac{15}{4}x + 1$

18. $2x^2 - 7x - 4$

19. $x^2 + 4x - 21$

20. $x^2 - 2x - 3$

21. $x^2 - 4x - 45$

22. $2x^2 + 32x + 110$

23. $x^2 - 20x + 100$

24. $3x^2 - 21x - 90$

25. $x^2 + 3x - 10$

26. $x^2 - 12x + 27$

2. fejezet

Minden, amit tudni akartál a sorozatokról

2.1. Monotonitás

Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat monotonitás szempontjából!

1. $a_n = \frac{1}{n}$

5. $a_n = \frac{n+3}{n+2}$

2. $a_n = \frac{n+1}{n+3}$

6. $a_n = \frac{2n-5}{5n-2}$

3. $a_n = \frac{n+4}{n-5}$

7. $a_n = \frac{n+2}{n-14}$

4. $a_n = \frac{2n-3}{n+2}$

8. $a_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

2.2. Határérték

Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$

2. $\lim \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$

3. $\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$

4. $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-2}$

5. $\lim \left(\frac{3+2n}{2n-5}\right)^n$

6. $\lim \frac{n^3 + 2n - 3}{n^2 - 5n}$

7. $\lim \frac{\sqrt{n+1} + 2n^2}{n^3 - \sqrt[4]{3n^2 + 2n} - 2}$

8. $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

9. $\lim \frac{n^2 + 2n - 3}{n^2 + 5n + 2}$

10. $\lim \frac{4n^2 + 2}{3n^2 - 5n - 2}$

11. $\lim \frac{3n^2 - n}{n^4 + 2}$

12. $\lim \frac{2n^2 + 3n - 2}{3n + 5}$

13. $\lim \frac{n - n^3}{n^2 + 2}$

14. $\lim \frac{\sqrt[4]{n^3} - \sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n^7}}$

15. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + n^3}{\sqrt{n} - \sqrt[5]{n^6 + n^5}}$

16. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2} - 3}{n - 1}$

17. $\lim \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 5n - 6}$

18. $\lim \frac{5n^3 + 2n^2 - n + 2}{4n^3 - 3n - 5}$

19. $\lim \frac{26n^4 - 3n^2 + 2n - 5}{4n^5 + 5n^3 - 6n^2 + 2}$

20. $\lim \frac{3n^2 - 5n + 2}{6n^4 - 2n^3 + 3}$

21. $\lim \frac{n^7 + 6n^5 - 5n^2 - 3}{n^2 - 5n - 2}$

22. $\lim \frac{2 + 3n - 5n^2 - 3n^3}{4n + 5n^2}$

23. $\lim \frac{2 + 3n - 5n^2 - 3n^3}{4n - 5n^2}$

24. $\lim (2 + 3n - 5n^2 - 3n^3)$

25. $\lim \frac{n^2 + 2n - 3}{\sqrt{n^3 + 5n} - 2}$

26. $\lim \frac{\sqrt[3]{8n^6 - 2n^3 + 3n - 2} + n - 5}{\sqrt{4n^2 + 2n - 1} + \sqrt[4]{n + 1}}$

27. $\lim \frac{\sqrt[3]{3n^2 - 2} + 5n}{\sqrt{2n^3 - 3n^2 + 2}}$

28. $\lim \frac{\sqrt[3]{5n^2 - 3n + 6}}{2n^3 - 6n - 3}$

29. $\lim (\sqrt{4n} - \sqrt{4n + 1})$

30. $\lim \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

31. $\lim \frac{3 \cdot 2^{n+3} - 4^n}{9^{n-2}}$

32. $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

33. $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

34. $\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

35. $\lim \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^n$

36. $\lim \left(1 + \frac{3}{4n}\right)^n$

37. $\lim \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n$

38. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

39. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+5}$

40. $\lim \left(\frac{n-2}{n+5}\right)^n$

41. $\lim \left(1 + \frac{6}{n}\right)^n$

42. $\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

43. $\lim \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n$

44. $\lim \left(\frac{3n-2}{3n-7}\right)^{4n+9}$

45. $\lim \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$

46. $\lim \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

47. $\lim \left(\frac{n-3}{n}\right)^{2n-3}$

48. $\lim \left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n-3}{7}}$

49. $\lim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{3}{5}n+4}$

50. $\lim \left(1 + \frac{1}{12}\right)^n$

51. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5$

2.3. Korlátosság

Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat korlátosság szempontjából!

1. $a_n = \frac{3n-5}{2n+3}$

2. $a_n = \frac{2n-3}{4n-12}$

3. $a_n = \frac{3^n-6}{9^{n-2}-27}$

2.4. Küszöbszám

Hányadik tagtól kezdve esnek a következő sorozatok elemei a határérték ϵ sugarú környezetébe?

1. $a_n = \frac{n+1}{n-2}, \quad \epsilon = 0,01$

2.5. Sorozatok teljes vizsgálata

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét! Vizsgáljuk meg őket monotonitás és korlátosság szempontjából! Adjuk meg az adott ϵ értékhez tartozó küszöbszámot!

1. $a_n = \frac{1}{n}, \quad \epsilon = \frac{1}{1000}$

2. $a_n = 2 - \frac{n-3}{n+1}, \quad \epsilon = \frac{1}{100}$

3. fejezet

Függvénye határértéke, folytonossága

3.1. Függvények végtelenben vett határértéke

Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket!

$$1. \lim_{+\infty} 3x^2 + 2x - 2$$

$$2. \lim_{+\infty} \frac{x^5 + 2x^2 - 3}{3x^2 + x}$$

$$3. \lim_{+\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 2}{5x^2 + x + 1}$$

$$4. \lim_{-\infty} \frac{3x^3 + 4x - 5}{2x^3 + 5}$$

$$5. \lim_{-\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2}$$

$$6. \lim_{+\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 2}$$

$$7. \lim_{-\infty} \frac{3x^5 + 4x^4 - 3x^2}{2x^2 + 5x - 3}$$

$$8. \lim_{+\infty} \left(\frac{3x - 5}{3x + 2} \right)^{4x-2}$$

3.2. Függvények véges helyen vett határértéke

Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket!

$$1. \lim_{-3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 10}$$

$$2. \lim_{-2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 10}$$

$$3. \lim_{-5} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 10}$$

$$4. \lim_{2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$$

3.3. Vegyes feladatok függvények határértékére

Határozzuk meg a következő függvények határértékeit a megadott helyeken!

1. $\lim_a \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 6x + 5} \quad a = \pm\infty; -5; -1$
2. $\lim_a \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \quad a = \pm\infty; 2$
3. $\lim_a \frac{x + 2}{4x^2 + 4x - 8} \quad a = \pm\infty; -2; 1$

3.4. Függvények folytonossága

4. fejezet

Deriválni mindenki tud (csak még nem tud róla)

A következőkben felírom a deriváláshoz elengedhetetlenül szükséges képleteket. Az első csoportban lévőket nevezem deriválási szabályoknak, a második csoport pedig az elemi függvények deriváltjait tartalmazza.

A deriválási szabályok egy függvény deriválását sem teszik önmagukban lehetővé, hanem arról szólnak, hogy ha függvényekkel műveleteket végzünk, akkor hogyan kell deriválni ezekben az esetekben. A képletek sorban a következő esetekre vonatkoznak: konstanssal való szorzás (osztás), két függvény összege és különbsége, két függvény szorzata, két függvény hányadosa, végül pedig az összetett függvény.

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \qquad \left(\left(\frac{f(x)}{c} \right)' = \frac{f'(x)}{c} \right) \qquad (4.1)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \qquad (4.2)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad (4.3)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad (4.4)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad (4.5)$$

Az elemi függvények deriváltjai tulajdonképpen az alapfüggvények deriválási módját adják

meg. Végző soron az elemi függvényekből az előző csoportban bemutatott függvényekkel végezhető műveletek segítségével áll elő az összes számunkra releváns függvény, így ezeknek a képleteknek a segítségével *elvileg* minden szóba jöhető függvényt tudni kell deriválni.

$$c' = 0 \quad (4.6) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (4.11)$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (4.7) \quad (\sin x)' = \cos x \quad (4.12)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (4.8) \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (4.13)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (4.9) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (4.14)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (4.10) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (4.15)$$

A legtöbb embernek a következő függvények ismeretére az életben nem lesz szüksége, ők felejtsek el az erre vonatkozó feladatokat is.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.16) \quad (\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x \quad (4.22)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.17) \quad (\operatorname{cth} x)' = 1 - \operatorname{cth}^2 x \quad (4.23)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (4.18) \quad (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (4.24)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (4.19) \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (4.25)$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad (4.20) \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (4.26)$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad (4.21) \quad (\operatorname{arcth} x)' = -\frac{1}{1-x^2} \quad (4.27)$$

4.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények deriválása

A következő függvények deriválásához elegendő a 4.1-4.2 és a 4.6-4.27 képletek használata!

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu> email: matstat@fw.hu

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = 5$
3. $f(x) = \frac{4}{3}$
4. $f(x) = x^7$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^6$
7. $f(x) = x^8$
8. $f(x) = x^{273}$
9. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$
10. $f(x) = x^{-3}$
11. $f(x) = x^2$
12. $f(x) = x$
13. $f(x) = 4x$
14. $f(x) = 6x^7$
15. $f(x) = 3x^2$
16. $f(x) = 6x^9$
17. $f(x) = -x^7$
18. $f(x) = \frac{x^7}{3}$
19. $f(x) = \frac{2x^5}{7}$
20. $f(x) = x^7 - x^4 + 2$
21. $f(x) = 6x^5 - 7x^3 + x^2 - 5$
22. $f(x) = x^2 + 2x - 5$
23. $f(x) = 4x^2 - 3x - 5$
24. $f(x) = 5x^7 + 8x^3 - 2x$
25. $f(x) = 6x^5 - 2x^2 + \frac{x}{2} - 3$
26. $f(x) = \sqrt{x}$
27. $f(x) = (x - 5)^2$
28. $f(x) = \frac{1}{x^7}$
29. $f(x) = \frac{1}{2x^7}$
30. $f(x) = \frac{2}{x^7}$
31. $f(x) = \frac{6x}{5x^3}$
32. $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$
33. $f(x) = \sqrt[7]{2x^4}$
34. $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
35. $f(x) = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2} \sqrt[4]{x^3}}$
36. $f(x) = (x^5 + 6x^3)(3x^2 + 2)$
37. $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 3}{2x}$
38. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 6x^5 + 2}{\sqrt{x^5}}$
39. $f(x) = 24^x$
40. $f(x) = \log_5 x$

41. $f(x) = \lg x$

42. $f(x) = \frac{1}{x}$

43. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

44. $f(x) = \frac{5}{x^2}$

45. $f(x) = \frac{5x}{x^2}$

46. $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 3}{x^2}$

47. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^5}$

48. $f(x) = \frac{x^6 + 2x^2 - x}{3x}$

49. $f(x) = \sqrt{x^3 \sqrt[4]{x^5} \sqrt[6]{x^7}}$

50. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^5} \sqrt{x} - x^3}{\sqrt[4]{x}}$

51. $f(x) = e^x$

52. $f(x) = 2^x$

53. $f(x) = \ln x$

54. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)(\sqrt{x} - 3)$

55. $f(x) = 5^x$

56. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

57. $f(x) = \log_2 x$

58. $f(x) = \log_{23} x$

59. $f(x) = \log_{\frac{3}{5}} x$

60. $f(x) = \sin x$

61. $f(x) = \cos x$

62. $f(x) = \operatorname{tg} x$

63. $f(x) = \operatorname{ctg} x$

64. $f(x) = \frac{x^2}{x^7}$

65. $f(x) = \frac{2}{x}$

66. $f(x) = \frac{1}{2x}$

67. $f(x) = \frac{6}{7x^5}$

68. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

69. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$

70. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

71. $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}$

72. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

73. $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$

74. $f(x) = \frac{4x^2}{3x^7}$

75. $f(x) = \frac{x^5}{2x^3}$

76. $f(x) = \frac{\sqrt[7]{x^2}}{2\sqrt[3]{x^5}}$

77. $f(x) = \frac{1}{x^8}$

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu>

email: matstat@fw.hu

78. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{x^8}}$

79. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

80. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$

81. $f(x) = \frac{3x^3 - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x}}$

82. $f(x) = x^{244}$

83. $f(x) = 2x^5$

84. $f(x) = x^7 + x^2$

85. $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$

86. $f(x) = x^6$

87. $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

88. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

89. $f(x) = \frac{x^7}{x^2}$

90. $f(x) = \frac{x^7 - 4x - 2}{x^3}$

91. $f(x) = 6x^2 - 3x + 2$

92. $f(x) = 4x^7 + 6x^5 - 7x^2 + x - 5$

93. $f(x) = 36x^2 - 18x + 2$

94. $f(x) = 5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x$

95. $f(x) = 4x - 2$

96. $f(x) = 2 - 6x + x^2$

97. $f(x) = 4x^3 - x$

98. $f(x) = 6 \cdot e^x$

99. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

100. $f(x) = 4 \log_{26} x$

101. $f(x) = 8 \sin x$

102. $f(x) = 2 \cos x$

103. $f(x) = \frac{\sin x}{3}$

104. $f(x) = 4x^3$

105. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

106. $f(x) = \frac{x^2}{x^7}$

107. $f(x) = \frac{4}{x^8}$

108. $f(x) = \frac{x^8}{4}$

109. $f(x) = \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}$

110. $f(x) = \frac{4x^2 - 6x + 2}{x}$

111. $f(x) = \frac{2x^6 + 4\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x}}{3x^4}$

4.2. Szorzat és tört deriválása

A következő függvényeket deriváljuk a szorzási, illetve a hányadosra vonatkozó szabály (4.3-4.4) felhasználásával.

1. $f(x) = (x + 1)(x - 1)$
2. $f(x) = (2x - 3)(5x + 1)$
3. $f(x) = (3x + 2)^2$
4. $f(x) = \operatorname{tg}x$ (most ne használjuk a 4.14 képletet)
5. $f(x) = \operatorname{ctg}x$ (most ne használjuk a 4.15 képletet)
6. $f(x) = (\ln x + e^x)(\operatorname{tg}x - \cos x)$
7. $f(x) = \frac{\log_3 x + \sin x}{28^x}$
8. $f(x) = \frac{\arcsin \frac{1}{2} + \ln e^2}{\sin \frac{\pi}{4} + \cos 2}$
9. $f(x) = (2 \sin x - 5x^7) \cdot \log_7 x$
10. $f(x) = \frac{x^7 \cdot \ln x}{\cos x}$
11. $f(x) = 10^x \cdot (\ln x + x^2) \cdot \operatorname{ctg}x$
12. $f(x) = (x^2 + 3x + 5) \cdot \sin x$
13. $f(x) = \log_{28} x \cdot \cos x$
14. $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 3}{x^3 - 6}$
15. $f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$
16. $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{\cos x}$
17. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x \cdot x^2}$
18. $f(x) = x^5 \cdot 2^x \cdot \ln x$
19. $f(x) = \frac{x - 3}{e^x}$
20. $f(x) = \frac{e^x}{x^6}$
21. $f(x) = x \cdot \ln x$
22. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
23. $f(x) = \frac{2x - 5}{3x^2 + 6x - 2}$
24. $f(x) = \frac{e^x}{3x + 2}$
25. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x^8 - \sqrt[3]{x} + 1}$
26. $f(x) = \frac{e^x - \log_2 x}{x^7 + \sin x}$
27. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{e^x}$
28. $f(x) = e^x (\ln x - 2^x)$
29. $f(x) = x^7 \cdot e^x$
30. $f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot \ln x$
31. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$$32. f(x) = \log_2 x \cdot \sqrt[3]{x^7}$$

$$33. f(x) = 2^x \cdot (\sqrt{x} - x^2)$$

$$34. f(x) = (\cos x - \ln x)(e^x + 7\sqrt[3]{x})$$

$$35. f(x) = \frac{x^2 - 5x}{2x - 3}$$

$$36. f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$37. f(x) = x^2 \cdot 2^x \cdot \log_3 x$$

$$38. f(x) = \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 - 3x}$$

4.3. Összetett, de nem feltétlenül bonyolult függvények deriválása

$$1. f(x) = (x + 7)^5$$

$$2. f(x) = (2x^3 - 6x^2 + 5)^8$$

$$3. f(x) = e^{x^2 - 7x + 2}$$

$$4. f(x) = 29^{\sin x}$$

$$5. f(x) = \ln(2x + 3)$$

$$6. f(x) = \log_5(\operatorname{tg} x)$$

$$7. f(x) = \sqrt{x^2 + 9x - 3}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{2x^2 + 9x - 3}$$

$$9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$$

$$10. f(x) = (2x^2 - 3x + 2)^7$$

$$11. f(x) = \sqrt{3x - 2}$$

$$12. f(x) = e^{x^2 - 3x + 5}$$

$$13. f(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$14. f(x) = \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$15. f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 4x - 2)}$$

$$16. f(x) = (2x + 2)^6$$

$$17. f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

$$18. f(x) = \sqrt[3]{6x^7 - 5x^2 + 2}$$

$$19. f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{(3x^7 - 5x^3 + 2x)^2}}$$

$$20. f(x) = e^{x^2 - 2x + 2}$$

$$21. f(x) = \ln(2x^6 - 3x + 2)$$

$$22. f(x) = (e^x)^6$$

$$23. f(x) = e^{x^6}$$

$$24. f(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$25. f(x) = \ln \operatorname{tg} x$$

$$26. f(x) = \operatorname{tg} \ln x$$

$$27. f(x) = \ln \frac{x^2 + 2}{x + 2}$$

$$28. f(x) = 2^{\sin x \cdot e^x}$$

$$29. f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$30. f(x) = \log_5 (e^x + \operatorname{tg} x) (x^2 - 3x + 2)$$

$$31. f(x) = \arcsin (x^7 - 3x^2 + 2x - 5)$$

$$32. f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$$

$$33. f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 5x - 3}}$$

$$34. f(x) = \operatorname{tg} (\arcsin e^x)$$

$$35. f(x) = e^{\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2)}$$

$$36. f(x) = \sqrt[4]{\ln \ln x}$$

$$37. f(x) = \sin x^2$$

$$38. f(x) = \sin^2 x$$

$$39. f(x) = \ln x^2$$

$$40. f(x) = \ln^2 x$$

$$41. f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$42. f(x) = e^{x^2 - 5x - \cos x}$$

$$43. f(x) = \ln \frac{x + 1}{2^x}$$

$$44. f(x) = (x^2 - 3x + 2)^7$$

$$45. f(x) = \sqrt{2x - 5}$$

$$46. f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{e^x - \log_7 x}}$$

$$47. f(x) = (2x - 3)^7$$

$$48. f(x) = (e^x + \operatorname{ctg} x)^2$$

$$49. f(x) = \operatorname{ctg}^6 x$$

$$50. f(x) = e^{x^2 - 3x + 5}$$

$$51. f(x) = e^{\sin x}$$

$$52. f(x) = \ln \sin x$$

$$53. f(x) = \sin \ln x$$

$$54. f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$55. f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}}$$

$$56. f(x) = e^{\frac{x^2 - 3x + 2}{2x - x^3}}$$

$$57. f(x) = \frac{6}{(x^2 - 3)^5}$$

$$58. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^3 + \cos x}}$$

$$59. f(x) = \frac{1}{3x^4 - 5x^2 + 2}$$

$$60. f(x) = \operatorname{ctg} x^6$$

$$61. f(x) = (x^2 + 2)^7$$

$$62. f(x) = \sqrt{3x^5 + 2x}$$

$$63. f(x) = \sqrt[5]{(6x - \sqrt[3]{x})^2}$$

$$64. f(x) = e^{x^2 - 3x + 1}$$

$$65. f(x) = 5^{-x} + 2^x - 3^{2x - 6}$$

$$66. f(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

67. $f(x) = \ln(6x^5 - 2x^3 + 3x)$

71. $f(x) = \cos(5x^2 - 3x + 2)$

68. $f(x) = \ln \frac{2x - 6}{6x^3 + 2x}$

72. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

69. $f(x) = \sin e^x$

73. $f(x) = e^{\sqrt{2x^2 + 5}}$

70. $f(x) = \sin \cos x$

74. $f(x) = \sin \sqrt{\frac{2x^2 - 5}{3x^3 + 2x^2}}$

4.4. Mire jó a deriválás I.: érintő egyenlete

Adjuk meg a következő függvények adott x_0 pontbeli érintőjének egyenletét!

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$ $x_0 = 14$

3. $f(x) = \ln(2x+2)$ $x_0 = \frac{1}{2}$

2. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $x_0 = 5$

4.5. Mire jó a deriválás II.: elaszticitás

4.6. Mire jó a deriválás III.: függvényvizsgálat

4.6.1. Monotonitás, szélsőérték

Határozzuk meg a következő függvények szélsőérték helyeit és szélsőértékeit!

1. $f(x) = x^2$

4. $f(x) = x^3$

2. $f(x) = \frac{x^3}{x}$

5. $f(x) = x^3 - 12x$

3. $f(x) = \sqrt{x-2}$

6. $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 2)$

4.6.2. Konvex-konkáv szakaszok, inflexiós pont

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket szélsőértékek és monotonitás, illetve konvex-konkáv intervallumok és inflexiós pontok szempontjából!

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu> email: matstat@fw.hu

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 8$

3. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

2. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

4.6.3. Teljes függvényvizsgálat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvényeken!

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

2. $f(x) = \frac{e^x}{(x+2)^2}$

4.7. Mire jó a deriválás IV.: L'Hospital szabály

5. fejezet

Az integrálás „csak” a deriválás visszafelé

A következőkben felírom az integráláshoz elengedhetetlenül szükséges képleteket. Az első csoportban lévőket nevezem integrálási szabályoknak, a második csoport pedig az elemi függvények integráljait tartalmazza.

Az integrálási szabályok egy függvény integrálását sem teszik önmagukban lehetővé, hanem arról szólnak, hogy ha függvényekkel műveleteket végzünk, akkor hogyan kell integrálni ezekben az esetekben. A képletek sorban a következő esetekre vonatkoznak: konstanssal való szorzás (osztás), két függvény összege és különbsége, összetett függvény deriváltjának integrálása, parciális integrálás, végül pedig a helyettesítéses integrálás.

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx \quad \left(\int \frac{f(x)}{c} \, dx = \frac{\int f(x) \, dx}{c} \right) \quad (5.1)$$

$$\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx \quad (5.2)$$

$$\int f'(g(x)) g'(x) \, dx = f(g(x)) + c \quad (5.3)$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx \quad (5.4)$$

$$\int f'(g(x)) g'(x) \, dx = \int f'(y) \, dy = f(y) + c \quad (5.5)$$

Az elemi függvények integráljai tulajdonképpen az alapfüggvények integrálási módját adják meg. Végző soron az elemi függvényekből az előző csoportban bemutatott függvényekkel

végezhető műveletek segítségével áll elő az összes számunkra releváns függvény, így ezeknek a képleteknek a segítségével *elvileg* minden szóba jöhető függvényt tudni kell integrálni.

$$\int 0 \, dx = c \quad (5.6) \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad (5.11)$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \quad (5.7) \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + c \quad (5.12)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c \quad (5.8) \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x \quad (5.13)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (5.9) \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x \quad (5.14)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c \quad (5.10)$$

A legtöbb embernek a következő függvények ismeretére az életben nem lesz szüksége, ők felejtsek el az erre vonatkozó feladatokat is.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \quad (5.15) \qquad (\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x \quad (5.19)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x \quad (5.16) \qquad (\operatorname{cth} x)' = 1 - \operatorname{cth}^2 x \quad (5.20)$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x \quad (5.17) \qquad (\operatorname{arsh} x)' = \quad (5.21)$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x \quad (5.18) \qquad (\operatorname{arch} x)' = \quad (5.22)$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \quad (5.23)$$

$$(\operatorname{arcth} x)' = ? \quad (5.24)$$

5.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények integrálása

Integráljuk a következő függvényeket az 5.1-5.2 és az 5.6-5.24 szabályok felhasználásával!

1. $\int x^7 \, dx$

3. $\int \sqrt[6]{x^7} \, dx$

2. $\int 8x^5 + 9x^3 - 3x + 2 \, dx$

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu>

email: matstat@fw.hu

4. $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{\sqrt{x}} dx$

5. $\int \sqrt[6]{x^5 \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x}}} dx$

6. $\int \frac{x^3 - 7x^2 + x - 3}{x^2} dx$

5.2. Összetett függvények deriváltjának integrálása

Integráljuk az alábbi függvényeket az 5.3 szabály felhasználásával!

1. $\int 2x(x^2 - 3)^7 dx$

14. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$

2. $\int (6x^2 - 2x) \sqrt[4]{2x^3 - x^2 + 2} dx$

15. $\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}} dx$

3. $\int (12x^2 - 4x) \sqrt[4]{2x^3 - x^2 + 2} dx$

16. $\int (2e^{2x} - 3)(e^{2x} - 3x + 5)^7 dx$

4. $\int (3x^2 - x) \sqrt[4]{2x^3 - x^2 + 2} dx$

17. $\int (6x^2 - 4x + 2) \cdot e^{x^3 - x^2 + x} dx$

5. $\int (2x - 1)(x^2 - x + 3)^7 dx$

18. $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$

6. $\int \frac{12x^3 + 4x + 1}{3x^4 + 2x^2 + x - 5} dx$

19. $\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x - 5} dx$

7. $\int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 2)^2} dx$

20. $\int \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x dx$

8. $\int (5x^4 - 9) \cdot e^{x^5 - 9x + 3} dx$

21. $\int \frac{12x^3 + 4x + 1}{\sqrt{3x^4 + 2x^2 + x - 5}} dx$

9. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

22. $\int \frac{2x + 1}{3x^2 + 3x + 2} dx$

10. $\int (3x^2 - 2) \cdot 2^{x^3 - 2x + 5} dx$

23. $\int \frac{4x + 2}{3x^2 + 3x + 2} dx$

11. $\int (6x^2 - 4x + 1) \cdot \sin(2x^3 - 2x^2 + x - 2) dx$

12. $\int 2 \cdot \cos(2x - 3) dx$

24. $\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 1} dx$

13. $\int -\sin x \cdot e^{\cos x} dx$

5.3. Parciális integrálás

Integráljuk az alábbi függvényeket a parciális integrálásra vonatkozó szabály (5.4) felhasználásával!

1. $\int x \cdot e^x dx$

4. $\int 2x^3 \cdot e^x dx$

2. $\int x \cdot \ln x dx$

3. $\int \ln x dx$

5. $\int x \cdot \sin 3x dx$

5.4. Integrálás helyettesítéssel

5.5. Határozott integrálás

Adjuk meg a következő határozott integrálok értékét!

1. $\int_1^2 x^2 - 3x + 2 dx$

5.6. Mire jó az integrálás: területszámítás

1. Számítsuk ki a következő két függvény által közrezárt terület nagyságát!

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \qquad g(x) = 2x - 1$$

2. Számítsuk ki a következő két függvény által közrezárt terület nagyságát!

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad g(x) = x + 7$$

3. Számítsuk ki a következő függvény és az x -tengely által közrezárt terület nagyságát!

$$f(x) = -x^2 + 6x - 8$$

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu> email: matstat@fw.hu

4. Számítsuk ki a következő függvény és az x -tengely közti terület nagyságát az $[1; 9]$ intervallumban!

$$f(x) = \sqrt{x} - 2$$

6. fejezet

Többváltozós függvények és egyéb nyalánkságok

6.1. Parciális deriválás

6.2. Többváltozós függvények szélsőértéke

II. rész

Megoldás

7. fejezet

Egy kis középiskolás matek

7.1. Ismered a számológéped?

7.2. A hatványozás azonosságai

7.3. Egy pár szó az egyenletek megoldásáról

8. fejezet

Minden, amit tudni akartál a sorozatokról

8.1. Monotonitás

1. szigorúan monoton csökken
2. szigorúan monoton nő
3. a hatodik tagtól kezdve szigorúan monoton csökken
4. szigorúan monoton nő

8.2. Határérték

8.3. Korlátosság

8.4. Küszöbszám

8.5. Sorozatok teljes vizsgálata

9. fejezet

Függvénye határértéke, folytonossága

- 9.1. Függvények végtelenben vett határértéke
- 9.2. Függvények véges helyen vett határértéke
- 9.3. Vegyes feladatok függvények határértékére
- 9.4. Függvények folytonossága

10. fejezet

Deriválni mindenki tud (csak még nem tud róla)

10.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények deriválása

Deriváld a következő függvényeket!

1. $f'(x) = 0$

2. $f'(x) = 0$

3. $f'(x) = 0$

4. $f'(x) = 7x^6$

5. $f'(x) = 3x^2$

6. $f'(x) = 6x^5$

7. $f'(x) = 8x^7$

8. $f'(x) = 273x^{272}$

9. $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

10. $f'(x) = -3x^{-4}$

11. $f'(x) = 2x$

12. $f'(x) = 1$

13. $f'(x) = 4$

14. $f'(x) = 42x^6$

15. $f'(x) = 6x$

16. $f'(x) = 54x^8$

17. $f'(x) = -7x^6$

18. $f'(x) = \frac{7x^6}{3}$

19. $f'(x) = \frac{10x^4}{7}$

20. $f'(x) = 7x^6 - 4x^3$

21. $f'(x) = 30x^4 - 21x^2 + 2x$

22. $f'(x) = 2x + 2$

23. $f'(x) = 8x - 3$

24. $f'(x) = 35x^6 + 24x^2 - 2$

25. $f'(x) = 30x^4 - 4x + \frac{1}{2}$

26. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

27. $f'(x) = 2x - 10$

28. $f'(x) = -\frac{7}{x^8}$

29. $f'(x) = -\frac{7}{2x^8}$

30. $f'(x) = -\frac{14}{x^8}$

31. $f'(x) = -\frac{12}{5x^3}$

32. $f'(x) = \frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$

33. $f'(x) = \frac{4\sqrt[7]{2}}{7\sqrt[7]{x^3}}$

34. $f'(x) = \frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$

35. $f'(x) = \frac{23}{24\sqrt[24]{x}}$

36. $f'(x) = 21x^6 + 100x^4 + 36x^2$

37. $f'(x) = 3 + \frac{3}{2x^2}$

38. $f'(x) = -\frac{11}{6\sqrt[6]{x^{17}}} - 15\sqrt{x^3} - \frac{5}{\sqrt{x^7}}$

39. $f'(x) = 24^x \ln 24$

40. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 5}$

41. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

42. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

43. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

44. $f'(x) = -\frac{10}{x^3}$

45. $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$

46. $f'(x) = 2x - \frac{6}{x^3}$

47. $f'(x) = -\frac{6}{x^4} + \frac{12}{x^5}$

48. $f'(x) = \frac{5x^4}{3} + \frac{2}{3}$

49. $f'(x) = \frac{109\sqrt[48]{x^{61}}}{48}$

50. $f'(x) = \frac{19\sqrt[12]{x^7}}{12}$

51. $f'(x) = e^x$

52. $f'(x) = 2^x \ln 2$

53. $f'(x) = \frac{1}{x}$

54. $f'(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} + \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6x + 9$

55. $f'(x) = 5^x \ln 5$

56. $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$

57. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$

58. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 23}$

59. $f'(x) = \frac{1}{x \ln \frac{3}{5}}$

60. $f'(x) = \cos x$

61. $f'(x) = -\sin x$

62. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

63. $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

64. $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$

65. $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

66. $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$

67. $f'(x) = -\frac{30}{7x^6}$

68. $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

69. $f'(x) = \frac{5\sqrt[4]{x}}{4}$

70. $f'(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

10.2. Szorzat és tört deriválása

1. $f'(x) = 2x$

2. $f'(x) = 20x - 13$

3. $f'(x) = 18x + 12$

4. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

6. $f'(x) = \left(\frac{1}{x} + e^x\right) (\operatorname{tg} x - \cos x) + (\ln x + e^x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x\right)$

7. $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x \ln 3} + \cos x\right) \cdot 28^x - (\log_3 x + \sin x) \cdot 28^x \ln 28}{784^x}$

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu>

email: matstat@fw.hu

8. $f'(x) = 0$

9. $f'(x) = (2 \cos x - 35x^6) \cdot \log_7 x + (2 \sin x - 5x^7) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 7}$

10. $f'(x) = \frac{x^6 (7 \ln x \cdot \cos x - x \ln x \cdot (-\sin x))}{\cos^2 x}$

11. $f'(x) = 10^x \cdot \ln 10 \cdot (\ln x + x^2) \cdot \operatorname{ctg} x + 10^x \cdot \left(\frac{1}{x} + 2x\right) \cdot \operatorname{ctg} x - 10^x \cdot (\ln x + x^2) \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$

12. $f'(x) = (2x + 3) \cdot \sin x + (x^2 + 3x + 5) \cdot \cos x$

13. $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 28} \cdot \cos x - \log_{28} x \cdot \sin x$

14. $f'(x) = \frac{x^6 + 5x^4 - 24x^3 - 9x^2 + 60x}{(x^3 - 6)^2}$

15. $f'(x) = -\frac{5}{(x - 3)^2}$

16. $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x \cdot \cos x + \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \cos x + \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

17. $f'(x) = \frac{\cos x \cdot e^x \cdot x^2 - \sin x \cdot e^x \cdot x^2 - \sin x \cdot e^x \cdot 2x}{e^{2x} \cdot x^4}$

18. $f'(x) = 5x^4 \cdot 2^x \cdot \ln x + x^5 \cdot 2^x \ln 2 \cdot \ln x + x^5 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{x}$

19. $f'(x) = \frac{e^x (4 - x)}{e^{2x}}$

20. $f'(x) = \frac{e^x (x^6 - 6x^5)}{x^{12}}$

21. $f'(x) = \ln x + 1$

22. $f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - 3x}{x^4}$

23. $f'(x) = \frac{-6x^2 + 11x + 26}{(3x^2 + 6x - 2)^2}$

$$24. f'(x) = \frac{e^x(3x-1)}{(3x+2)^2}$$

$$25. f'(x) = \frac{3\sqrt{x^{15}} - \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 6x}{2(3x^8 - \sqrt[3]{x} + 1)^2}$$

10.3. Összetett, de nem feltétlenül bonyolult függvények deriválása

$$1. f'(x) = 5(x+7)^4$$

$$2. f'(x) = 8(2x^3 - 6x^2 + 5)^7(6x - 12x)$$

$$3. f'(x) = e^{x^2-7x+2}(2x-7)$$

$$4. f'(x) = 29^{\sin x} \ln 29 \cdot \cos x$$

$$5. f'(x) = \frac{2}{2x+3}$$

$$6. f'(x) = \frac{1}{x \ln 5 \cos^2 x}$$

$$7. f'(x) = \frac{2x+9}{2\sqrt{x^2+9x-3}}$$

$$8. f'(x) = -\frac{4x+9}{(2x^2+9x-3)^2}$$

$$9. f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(2x-3)^3}}$$

$$10. f'(x) = 7(2x^2 - 3x + 2)^6(4x - 3)$$

$$11. f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$12. f'(x) = e^{x^2-3x+5} \cdot (2x-3)$$

$$13. f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$14. f'(x) = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$15. f'(x) = \frac{x+2}{(x^2+4x-2)\ln(x^2+4x-2)}$$

$$16. f'(x) = 21(2x+2)^5$$

$$17. f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$$

$$18. f'(x) = \frac{42x^6-10x}{3^3\sqrt{(6x^7-5x^2+2)^2}}$$

$$19. f'(x) = -\frac{42x^6-30x^2+4}{5^5\sqrt{(3x^7-5x^3+2x)^3}}$$

$$20. f'(x) = e^{x^2-2x+2}(2x-2)$$

$$21. f'(x) = \frac{12x-3}{(2x^6-3x+2)}$$

$$22. f'(x) = 6e^{6x}$$

$$23. f'(x) = e^{x^6} \cdot 6x^5$$

$$24. f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$25. f'(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}$$

$$26. f'(x) = \frac{1}{x \cos^2 \ln x} \operatorname{tg} \ln x$$

$$27. f'(x) = \frac{x^2+2x-2}{(x^2+2)(x+2)}$$

$$28. f'(x) = 2^{\sin x \cdot e^x} \ln 2 \cdot e^x (\cos x + \sin x)$$

$$29. f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$30. f'(x) = \frac{\left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(x^2 - 3x + 2) + (e^x + \operatorname{tg}x)(2x - 3)}{(e^x + \operatorname{tg}x)(x^2 - 3x + 2) \ln 5}$$

10.4. Mire jó a deriválás I.: érintő egyenlete

10.5. Mire jó a deriválás II.: elaszticitás

10.6. Mire jó a deriválás III.: függvényvizsgálat

10.7. Mire jó a deriválás IV.: L'Hospital szabály

11. fejezet

Az integrálás „csak” a deriválás visszafelé

11.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények integrálása

1. $\frac{x^8}{8} + c$

2. $\frac{8x^6}{6} + \frac{9x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c$

3. $\frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13} + c$

4. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + c$

5. $\frac{48}{95}\sqrt[48]{x^{95}} + c$

6. $\frac{x^2}{2} - 7x + \ln x - x^3 + c$

11.2. Összetett függvények deriváltjának integrálása

1. $\frac{(x^2 - 3)^8}{8} + c$

2. $\frac{4\sqrt[4]{(2x^3 - x^2 + 2)^5}}{5} + c$

3. $\frac{8\sqrt[4]{(2x^3 - x^2 + 2)^5}}{5} + c$

4. $\frac{2\sqrt[4]{(2x^3 - x^2 + 2)^5}}{5} + c$

5. $\frac{(x^2 - x + 3)^8}{8} + c$

6. $\ln|3x^4 + 2x^2 + x - 5| + c$

7. $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + c$

8. $e^{x^5 - 9x + 3} + c$

9. $\ln(e^x - e^{-x}) + c$

10. $\frac{2^{x^3 - 2x + 5}}{\ln 2} + c$

11. $-\cos(2x^3 - 2x^2 + x - 2) + c$

12. $\sin(2x - 3) + c$

13. $e^{\cos x} + c$

14. $\ln|\sin x - \cos x| + c$

15. $2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 3} + c$

16. $\frac{(e^{2x} - 3x + 5)^8}{8} + c$

17. $2e^{x^3 - x^2 + x} + c$

18. $e^{\sin x} + c$

19. $\ln|x^3 - 3x^2 + 2x - 5| + c$

20. $\sin \ln x + c$

21. $2\sqrt{3x^4 + 2x^2 + x - 5} + c$

22. $\frac{\ln|3x^2 + 3x + 2|}{3} + c$

23. $\frac{2 \ln|3x^2 + 3x + 2|}{3} + c$

24. $\frac{\ln|x^2 + 4x + 1|}{2} + c$

11.3. Parciális integrálás

1. $(x - 1)e^x + c$

2. $\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c$

3. $x(\ln x - 1) + c$

4. $2(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + c$

5. $\frac{\sin 3x}{9} - \frac{x \cos 3x}{3} + c$

11.4. Integrálás helyettesítéssel

11.5. Határozott integrálás

1. $-\frac{13}{6}$

11.6. Mire jó az integrálás: területszámítás

1. $T = \frac{4}{3}$

2. $T = 36$

3. $T = \frac{4}{3}$

4. $T = 4$

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu>

email: matstat@fw.hu

12. fejezet

Többváltozós függvények és egyéb nyalánkságok

12.1. Parciális deriválás

12.2. Többváltozós függvények szélsőértéke